Φυλλάδιο #3 – Διαφορισιμότητα Συναρτήσεων

Άσκηση 1: Εξετάστε σε ποια $z\in\mathbb{C}$ οι συναρτήσεις

i) $f(z)=2z-iz^2,\ z\in\mathbb{C}$

ii) $f(z)=iz^2-\bar{z},\ z\in\mathbb{C}$

iii) $f(z)=|z|^2\bar{z}-z^3,\ z\in\mathbb{C}$

iv) $f(z)=\bar{z}\cdot(2-z\cdot\bar{z}),\ z\in\mathbb{C}$

v) $f(z)=\log(z\bar{z}+\bar{z}),\ z\in\mathbb{C}\setminus\{-1,0\}$

vi) $f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$

είναι μιγαδικά διαφορίσιμες.

Επιπλέον στα (i), (ii), (iii), (iv) και (vi) υπολογίστε την τιμή της παραγώγου (όπου αυτή υπάρχει).

Άσκηση 2: Δίνεται $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με τύπο

$$f(x+iy)=c\cdot x^3+b\cdot x^2\cdot y+ibxy^2-icy^3,\quad x,y\in\mathbb{R} \text{ και } b,c\in\mathbb{C}$$

Να βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα $b,c\in\mathbb{C}$ ώστε η f να είναι ακέραια.

Άσκηση 3. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα ανοικτό $D\subseteq\mathbb{C}$. Αν f^2 είναι ολόμορφη στο D και $f(z)\neq 0,\ \forall z\in D$, νδο η f είναι ολόμορφη στο D και να βρεθεί η παράγωγος αυτής στο D.

Άσκηση 4 (Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης)

Έστω D και U ανοικτά $\subseteq \mathbb{C}$. Ας είναι ακόμα $f: D \to U$ συνεχής και $g: U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τ.ω $(g \circ f)(z) = z$, $\forall z \in D$. Αν $g'(w) \neq 0$, $\forall w \in U$ νδο η f είναι ολόμορφη και $f'(z) = \dfrac{1}{g'(f(z))}$, $\forall z \in D$

Άσκηση 5

Αν $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια, νδο η $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $z \in \mathbb{C}$ είναι ακέραια

Άσκηση 6

Να βρείτε ακέραια συνάρτηση f η οποία έχει $\operatorname{Re} f(x+iy) = 3e^{x} \cdot \cos y$ και $f(0) = 3$

Άσκηση 7

Έστω τόπος $D \subseteq \mathbb{C}$ και $f: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

i) Αν $\operatorname{Re} f(z) = (\operatorname{Im} f(z))^2$, $\forall z \in D$, νδο η f σταθ.

ii) Αν $|f|: D \to \mathbb{C}$ σταθερή, νδο f σταθερή

iii) Αν $|f(z) - i| = 3$, $\forall z \in D$, νδο f σταθερή

iv) Αν $\bar{f}$ ολόμορφη, νδο f σταθερή

v) Αν $\mathrm{Re} f(z) := u(x)$ και $\mathrm{Im} f(z) := v(y)$ για $z = x+iy$, νδο f είναι $\mathbb{C}$-ομοπαραλληλική δηλ. $f(z) = \lambda z + b$.

vi) Αν $(\mathrm{Re} f) \cdot \bar{f} : D \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη και $f(z) \neq 0$, $\forall z \in D$ νδο f είναι σταθερή

Άσκηση 8

Έστω D ανοιχτό $\subseteq \mathbb{C}$ και $f, g : D \to \mathbb{C}$ μιγαδικά διαφορίσιμες σ' ένα $z_0 \in D$ τ.ω $f(z_0) = g(z_0) = 0$ και $g'(z_0) \neq 0$. Νδο $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

Εφαρμογή:

Υπολογίστε τα όρια:

i) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^9 - i}{z^{10}+1}$, ii) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{e^z - 1}{z}$, iii) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\log z}{z-1}$

iv) $\lim\limits_{z \to -i} \dfrac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^4 - 1}$

Άσκηση 9 (Πολικές Εξισώσεις Cauchy-Riemann)

Αν $f = u + iv : \underbrace{D}_{\text{ανοιχτό}} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και θεωρήσουμε $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\rho > 0$ και $\theta \in [0, 2\pi)$, νδο

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \rho} = -\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \sqrt{|z^2 - \bar{z}^2|}$

i) Δείξτε ότι η f δεν είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο 0

ii) Εξετάστε αν η f πληροί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann στο $(0,0)$

iii) Δείξτε ότι το δ.π της f δεν είναι διαφορίσιμο στο σημείο $(0,0)$

Άσκηση 11 (sos)

i) Έστω $f = u + iv : \underbrace{D}_{\text{ανοιχτό}} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $f \in C^2(D)$

Νδο οι συναρτήσεις u και v είναι αρμονικές (δηλ. $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{cases}$, στο D και $u, v \in C^2(D)$)

ii) Να δώσετε παράδειγμα συνάρτησης $f:=u+iv$ η οποία έχει τις u και v αρμονικές συναρτήσεις

iii) Έστω $f=u+iv$ ακέραια. Νδο οι συναρτήσεις

$$\left.\begin{array}{l}\phi(x,y)=u^2(x,y)-v^2(x,y)\\ g(x,y)=u(x,y)\cdot v(x,y)\end{array}\right\},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$ είναι αρμονικές

[Ορισμός: Έστω $D\subseteq\mathbb{R}^2$ ανοικτό και ας είναι δύο συναρτήσεις $u,v:D\to\mathbb{R}$. Η v λέγεται αρμονική συζυγής της u στο D, αν η $f=u+iv$ είναι ολόμορφη στο D]

iv) Εξετάστε αν η $u(x,y)=x^2 \cdot y$ έχει αρμονική συζυγή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$

v) Να βρείτε (αν υπάρχει) μια αρμονική συζυγή συνάρτηση της $u(x,y)=x^3-3xy^2$

Άσκηση 12*

Νδο η συνάρτηση $u:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ με

$u(x,y):=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ είναι αρμονική και

i) έχει αρμονική συζυγή στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\}$

ii) δεν έχει αρμονική συζυγή στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Άσκηση 13

Να βρείτε το $\mathbb{R}$-διαφορικό των παρακάτω συναρτήσεων, στο σημείο z_0. (αν φυσικά υπάρχει)

i) $f(z) = 2z - iz^2$ και $z_0 = i$

ii) $f(z) = iz^2 - \bar{z}$ και $z_0 = 0$

iii) $f(z) = |z|^2 \cdot \bar{z} - z^3$ και $z_0 = 1$

iv) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2}{|z|} , & z \neq 0 \\ 0 , & z = 0 \end{cases}$ και $z_0 = 0$.